С.А. Лавренченко **www.lawrencenko.ru**

Лекция 14

Неопределенности и правило Лопиталя

Правило Лопита́ля применяется при вычислении пределов для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрытие неопределенности начинается с определения ее типа. Запись $f(x) \to \pm\infty$ будет подразумевать, что $f(x) \to +\infty$ или $f(x) \to -\infty$.

1. Неопределенные отношения

Теорема 1.1 (правило Лопиталя). *Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки a, причем $g'(x) \neq 0$ в этой проколотой окрестности. Пусть, далее, выполняется одно из следующих двух условий:*

(1) $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ ($x \to a$),

или

(2) $f(x) \to \pm\infty$ и $g(x) \to \pm\infty$ ($x \to a$).

Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

при условии, что предел в правой части существует или равен $\pm\infty$.

Доказательству этой теоремы предпошлем поясняющий пример.

Пример 1.2. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

Решение: Перед нами неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = 1. \blacksquare$$

Доказательство правила Лопиталя: Докажем теорему в частном случае. Более конкретно, будем предполагать, что выполнено условие (1), т.е. имеется неопределенность $\frac{0}{0}$. Будем предполагать, далее, что еще выполняются следующие три дополнительные условия:

(3) функции f и g определены в самой точке a, причем $f(a) = g(a) = 0$,

(4) производные f' и g' определены и непрерывны в точке a,

и

(5) $g'(a) \neq 0$.

(Такой случай встречается довольно часто; например, он имеет место в рассмотренном выше примере 1.2.)

Имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}. \ \blacksquare$$

Замечание 1.3. Правило Лопиталя справедливо и для односторонних пределов, а также для пределов в $\pm\infty$, т.е. запись «$x \to a$» можно заменить на любую из следующих записей: «$x \to a^+$», «$x \to a^-$», «$x \to \infty$» или «$x \to -\infty$».

Следующий пример показывает, что показательная функция (с основанием большим единицы) растет быстрее второй степени. Аналогично можно доказать, что показательная функция растет быстрее *любой* степени.

Пример 1.4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

Решение: Имеем неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Придется применить правило Лопиталя дважды:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty. \ \blacksquare$$

Следующий пример показывает, что логарифмическая функция (с основанием большим единицы) растет медленнее кубического корня. Аналогично показывается, что логарифм растет медленнее *любой* степени.

Пример 1.5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение: Имеем неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(\sqrt[3]{x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3x^{2/3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0 .\ \blacksquare$$

Пример 1.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

Решение: Имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя трижды:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(\sec^2 x)'\tan x + 2\sec^2 x(\tan x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sec^2 x\tan^2 x + 2\sec^4 x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} .\ \blacksquare$$

2. Неопределенные произведения

Научимся теперь раскрывать неопределенные произведения fg типа $0\cdot\infty$, т.е. вычислять пределы вида $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, где $f \to 0$ и $g \to \pm\infty$ при $x \to a$. Для этого нужно представить произведение fg как отношение $\dfrac{f}{1/g}$ или как $\dfrac{g}{1/f}$, что приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, соответственно. К получающимся неопределенностям можно применить правило Лопиталя.

Пример 2.1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

Решение: Имеем неопределенность типа $0\cdot\infty$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 .$$

Функцию можно было бы представить и в виде отношения $\dfrac{x}{1/\ln x}$, но дифференцирование было бы более громоздким. ■

Пример 2.2. Найти асимптоты кривой $y = x\exp x$.

Решение: Очевидно, вертикальных асимптот нет, поэтому ищем горизонтальные асимптоты. Поскольку и x, и $\exp x$ неограниченно возрастают при $x \to \infty$, имеем $\lim\limits_{x\to\infty} x\exp x = \infty$. Однако в минус бесконечности $\exp x \to 0$ при $x \to -\infty$ и мы имеем неопределенное произведение. Его раскрытие требует применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to-\infty} x\exp x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\exp(-x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\exp(-x)} = \lim_{x\to-\infty}(-\exp x) = 0.$$

Таким образом, данная кривая имеет единственную горизонтальную асимптоту $y = 0$, т.е. ось Ox. ■

Замечание 2.3. Если бы в последнем примере мы бы представили произведение $x\exp x$ в виде отношения $\dfrac{\exp x}{1/x}$, то не смогли бы устранить неопределенность, сколько бы раз не применяли правило Лопиталя. Поэтому, *если неопределенность устранить не удается, следует представить произведение в виде отношения другим способом.*

3. Неопределенные разности

Если $f(x)\to+\infty$ и $g(x)\to+\infty$, или если $f(x)\to-\infty$ и $g(x)\to-\infty$ при $x\to a$, то говорят, что предел $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$ имеет *тип* $\infty-\infty$ и называется *неопределенной разностью.* Для раскрытия неопределенной разности, нужно преобразовать разность в отношение, и затем применить правило Лопиталя.

Пример 3.1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\tan x)$.

Решение: Здесь неопределенность типа $\infty-\infty$. Вычисляем:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\tan x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.\ ■$$

4. Неопределенные степени

При вычислении предела вида $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ могут возникнуть *неопределенные степени типов* 0^0, ∞^0, *или* 1^∞. Существуют два способа вычисления таких пределов, оба из которых приводят к неопределенности $0\cdot\infty$.

1-й способ: Представить функцию $y=(f(x))^{g(x)}$ в виде $\ln y = g(x)\ln f(x)$. Если $\ln y\to L$, то $y\to e^L$ при $x\to a$; см. упражнение 4 ниже.

Пример 4.1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\sin 4x)^{\cot x}$.

Решение: Это неопределенность типа 1^∞. Решаем 1-м способом. Записываем: $y=(1+\sin 4x)^{\cot x}$, откуда $\ln y = \ln(1+\sin 4x)^{\cot x} = \cot x\ln(1+\sin 4x)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to0^+}\ln y = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{\tan x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\sec^2 x} = \frac{4}{1} = 4.$$

Поскольку $\ln y \to 4$, данный предел равен e^4. ■

2-й способ: Представить эту функцию в виде $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Пример 4.2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Решение: Заметим, что этот предел представляет неопределенность 0^0. Записываем $x^x = e^{x\ln x}$. В примере 2.1 мы уже показали, что показатель $x\ln x$ стремится к нулю при $x \to 0^+$. Поэтому $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$. ■

Вопросы для самопроверки

1. Обосновать справедливость каждого равенства в доказательстве теоремы 1.1.

2. Доказать, что показательная функция с основанием $a > 1$ растет быстрее любой степени.

3. Доказать, что логарифмическая функция с основанием $a > 1$ растет медленнее любой степени.

4. Доказать, что если $\ln y \to L$ $(x \to a)$, то $y \to \exp L$ $(x \to a)$.
   [*Решение:*

   $$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} \exp\ln y = \exp\lim_{x\to a}\ln y = \exp L$$

   Во 2-м равенстве использовали теорему 3.3 о переместительности знака предела и непрерывной функции с лекции 5.]

5. Вычислить 2-м способом предел из примера 4.1.